

วิชาสามัญ คณิตศาสตร์ 1 (มี.ค. 62)

วันอาทิตย์ที่ 17 มีนาคม 2562 เวลา 8.30 - 10.00 น.

ตอนที่ 1 แบบระบายตัวเลขที่เป็นคำตอบ จำนวน 10 ข้อ ข้อละ 2 คะแนน รวม 20 คะแนน

1. ให้ a เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า ห.ร.ม. และ ค.ร.น. ของ a และ 24 เท่ากับ 6 และ 360 ตามลำดับ แล้ว a เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 30 2. 36 3. 42 4. 90 5. 150

2. กำหนดให้ $i^2 = -1$, $\left(\frac{1+i}{2} - \frac{1}{1+i}\right)^3$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-i$ 2. i 3. -8 4. $-\frac{1}{8}$ 5. 1

3. $\cos^4\left(\frac{5\pi}{12}\right) - \sin^4\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 3. $-\frac{1}{2}$ 4. 0 5. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

4. ให้ P เป็นจุดบนวงรี ซึ่งมีโฟกัสอยู่ที่ $F_1(0, -2)$ และ $F_2(0, 2)$

ถ้า $PF_1 = 7$ และ $PF_2 = 3$ แล้ว สมการวงรีคือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{x^2}{21} + \frac{y^2}{25} = 1$

2. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$

3. $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$

4. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$

5. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

5. ถ้า A เป็นเมทริกซ์ 3×3 ซึ่ง $\det(2A) = 24$ แล้ว $\det(A^{-1})$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{12}$

2. $\frac{1}{3}$

3. 3

4. 6

5. 12

6. ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงบวก โดยที่ $a \neq 1$ ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $\log_a b = 3$ และ $\log b + \log a = 2$ แล้ว a มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\sqrt{3}$

2. 2

3. 3

4. $\sqrt{10}$

5. 10

7. ถ้าเส้นโค้งเส้นหนึ่งผ่านจุด $(8, 10)$ และมีความชันของเส้นโค้งที่จุด (x, y) ใดๆ เป็น $\frac{1}{3}x^3$ แล้ว เส้นโค้งนี้ผ่านจุดในข้อใดต่อไปนี้
1. $(0, 0)$
 2. $(0, 1)$
 3. $(0, 2)$
 4. $(0, 4)$
 5. $(0, 6)$

8. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{x^2+5x-14}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. $-\frac{1}{5}$
 2. $-\frac{1}{9}$
 3. 0
 4. $\frac{1}{9}$
 5. $\frac{1}{5}$

9. มีหนังสือภาษาไทยต่างกัน 2 เล่ม ภาษาอังกฤษต่างกัน 3 เล่ม และคณิตศาสตร์ต่างกัน 3 เล่ม ถ้าจะวางหนังสือเหล่านี้ซ้อนกันอยู่ในตู้เดียวกัน แล้วจำนวนวิธีที่จะจัดวางให้หนังสือวิชาเดียวกันอยู่ติดกันทั้งหมด เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. 18 วิธี
 2. 54 วิธี
 3. 72 วิธี
 4. 108 วิธี
 5. 432 วิธี

10. จำนวนจริง 100 จำนวน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 80 ถ้าสุ่มจำนวนเหล่านี้มา 10 จำนวน พบว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 75.5 แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิตของจำนวนที่เหลือ 90 จำนวน เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. 77.75 2. 78.5 3. 80.5 4. 81 5. 81.5

ตอนที่ 2 แบบปรนัย 5 ตัวเลือก เลือก 1 คำตอบที่ถูกต้องที่สุด จำนวน 20 ข้อ ข้อละ 4 คะแนน รวม 80 คะแนน

11. ผลบวกของคำตอบทั้งหมดของสมการ $|x^2 - 72| = x$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -1 2. 0 3. 8 4. 17 5. 19

12. เศษเหลือจากการหาร $\left(\sum_{k=1}^{10} k!\right)^2$ ด้วย 5 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 2. 1 3. 2 4. 3 5. 4

13. กำหนดให้ $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก
 ถ้า $x + 2$ หาร $P(x)$ เหลือเศษ 2 และสมการ $P(x) = 0$ มีคำตอบเป็นจำนวนตรรกยะอย่างน้อยหนึ่งตัว
 แล้ว $a + b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. 11 2. 12 3. 13 4. 14 5. 15

14. ในรูปสามเหลี่ยม ABC ถ้า $AC = 2\sqrt{3}$, $BC = 5$ และ $\hat{A} = 120^\circ$ แล้ว $\cos C$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. $\frac{1}{2}$ 2. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 3. $\frac{4 + 3\sqrt{3}}{10}$ 4. $\frac{2 + 3\sqrt{2}}{8}$ 5. $\frac{2 + 4\sqrt{3}}{10}$

15. วงกลมที่อยู่เหนือแกน X ซึ่งสัมผัสกับเส้นตรง $4y = 3x$ ที่จุด $(4, 3)$ และสัมผัสกับแกน Y
 มีรัศมีเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. $\sqrt{5}$ หน่วย 2. $\frac{5}{2}$ หน่วย 3. $\frac{13}{5}$ หน่วย 4. $\frac{8}{3}$ หน่วย 5. $2\sqrt{2}$ หน่วย

16. กำหนดให้ A, B และ C เป็นจุดในระบบพิกัดฉากสามมิติ และพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับ 1 ตารางหน่วย พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

ข. $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 2$

ค. $|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| < 2$

ง. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

จำนวนข้อความที่ถูกต้องเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 (ไม่มีข้อความใดถูก) 2. 1 3. 2
4. 3 5. 4

17. กำหนดให้ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์มิติ 3×3 และ $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ ถ้า A เป็นเมทริกซ์มิติ 3×3

ซึ่ง $AB^t = 2I$ และ $A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ แล้ว x มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{2}$ 2. 4 3. $\frac{9}{2}$ 4. 6 5. 8

18. ผลบวกของคำตอบทั้งหมดของสมการ $4^{|3x-1|} - 2^4 = 6(2^{|3x-1|})$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{3}$ 2. $\frac{2}{3}$ 3. 1 4. $\frac{4}{3}$ 5. $\frac{5}{3}$

19. เซตคำตอบของสมการ $\log(\log x) + \log(\log x^8 - 16) = 1$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $\{10, 100\sqrt{10}\}$ 2. $\{100, 10\sqrt{10}\}$ 3. $\{100, 100\sqrt{10}\}$
 4. $\{100\sqrt{10}\}$ 5. $\{10\sqrt{10}\}$

20. กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับเรขาคณิต ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -\frac{2}{3}$

แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

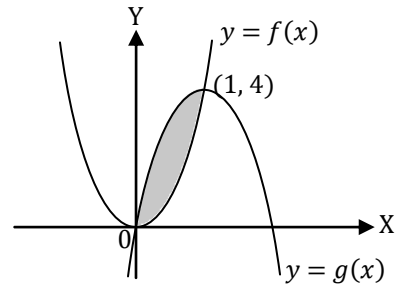
1. $\frac{1}{3}$ 2. $\frac{4}{9}$ 3. $\frac{2}{3}$ 4. 1 5. $\frac{4}{3}$

21. กำหนดให้ $f(x) = x^3 + 2x + 3$ และ $g(x) = f^{-1}(x)$ เป็นฟังก์ชันผกผันของ $f(x)$

ค่าของ $g'(6)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{6}$ 2. $\frac{1}{5}$ 3. $\frac{1}{3}$ 4. $\frac{1}{2}$ 5. 1

22. กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(0, 0)$
 และ $y = g(x)$ เป็นพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(1, 4)$ ซึ่งมีกราฟดังรูป
 พื้นที่ของบริเวณที่แรเงา มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้



1. 1 ตารางหน่วย
2. $\frac{4}{3}$ ตารางหน่วย
3. $\frac{3}{2}$ ตารางหน่วย
4. $\frac{5}{3}$ ตารางหน่วย
5. 2 ตารางหน่วย

23. กอล์ฟโบหนึ่งมีสลาก 9 โบ ซึ่งเขียนหมายเลข 1, 2, 3, ..., 9 ถ้าสุ่มหยิบสลาก 3 โบ พร้อมกันจากกอล์ฟโบนี้
 แล้วความน่าจะเป็นที่ผลคูณของหมายเลขทั้ง 3 เป็นจำนวนคู่ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{2}$
2. $\frac{2}{3}$
3. $\frac{16}{21}$
4. $\frac{33}{42}$
5. $\frac{37}{42}$

24. น้ำหนักของเด็กกลุ่มหนึ่ง มีการแจกแจงปกติ ถ้าเด็กที่มีน้ำหนักน้อยกว่า 30 กิโลกรัม มีอยู่ 15.87%
 และเด็กที่มีน้ำหนักมากกว่า 41 กิโลกรัม มีอยู่ 11.51%

แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิตของน้ำหนักของเด็กกลุ่มนี้ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

กำหนดตารางแสดงพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติดังนี้

z	0.29	0.41	1	1.2
พื้นที่	0.1141	0.1591	0.3413	0.3849

1. 34 กิโลกรัม
2. 34.5 กิโลกรัม
3. 35 กิโลกรัม
4. 35.5 กิโลกรัม
5. 36 กิโลกรัม

25. ให้ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{100}$ เป็นข้อมูลชุดหนึ่ง ซึ่งมี a, m, \bar{x} เป็นฐานนิยม มัธยฐาน และค่าเฉลี่ยเลขคณิตตามลำดับ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

- ก. ถ้าเพิ่มข้อมูลอีก 1 ค่า คือ a ลงในข้อมูลชุดนี้
แล้วฐานนิยมของข้อมูลชุดใหม่ เท่ากับฐานนิยมของข้อมูลชุดเก่า
- ข. ถ้าเพิ่มข้อมูลอีก 1 ค่า คือ m ลงในข้อมูลชุดนี้
แล้วมัธยฐานของข้อมูลชุดใหม่ เท่ากับมัธยฐานของข้อมูลชุดเก่า
- ค. ถ้าเพิ่มข้อมูลอีก 1 ค่า คือ \bar{x} ลงในข้อมูลชุดนี้
แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดใหม่ เท่ากับค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดเก่า
- ง. ถ้าเพิ่มข้อมูลอีก 3 ค่า คือ a, m และ \bar{x} ลงในข้อมูลชุดนี้
แล้วพิสัยของข้อมูลชุดใหม่ เท่ากับพิสัยของข้อมูลชุดเก่า

จำนวนข้อความที่ถูกต้องเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1. 0 (ไม่มีข้อความใดถูก) 2. 1 3. 2
- 4. 3 5. 4

26. ให้ x เป็นจำนวนจริงใดๆ

ค่าต่ำสุดของ $|2 - x| + 2|3 - x| + 2|5 - \sqrt{2} - x| + 2|3 + \sqrt{2} - x| + 2|5 - x| + |6 - x|$
เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1. $3 + 4\sqrt{2}$ 2. $4 + 3\sqrt{2}$ 3. $4 + 4\sqrt{2}$
- 4. $5 + 4\sqrt{2}$ 5. $5 + 5\sqrt{2}$

27. กำหนดให้ $i^2 = -1$ และ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ถ้า $S = \{(a, b, c) \mid i^a + i^b + i^c = 1 \text{ และ } a, b, c \in A\}$
แล้ว S มีจำนวนสมาชิกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1. 3 2. 4 3. 5 4. 7 5. 9

28. ถ้า $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับของจำนวนจริงบวก ซึ่ง $a_1 = 2$ และ $\log_{\frac{1}{3}} a_1, \log_{\frac{1}{3}} a_2, \dots, \log_{\frac{1}{3}} a_n, \dots$

เป็นลำดับเลขคณิต ซึ่งมีผลต่างร่วมเท่ากับ $\frac{1}{2}$ แล้ว $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $3 + \sqrt{3}$ 2. $3 + 2\sqrt{3}$ 3. $3 + 3\sqrt{3}$
 4. 9 5. $6\sqrt{3}$

29. ถ้า $z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right)$ และ $z_2 = 3 \left(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right)$ แล้ว $|z_1 - z_2|$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\sqrt{5}$ 2. $\sqrt{6}$ 3. 3 4. $2\sqrt{3}$ 5. $3\sqrt{2}$

30. กำหนดให้ $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ถ้าสุ่มหยิบสมาชิก 4 ตัวพร้อมกันจาก S เพื่อนำมาสร้างเมทริกซ์
 มิติ 2×2 แล้วความน่าจะเป็นที่เมทริกซ์นั้นเป็นเมทริกซ์ที่ไม่เอกฐานเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{2}{3}$ 2. $\frac{11}{15}$ 3. $\frac{4}{5}$ 4. $\frac{13}{15}$ 5. $\frac{14}{15}$

เฉลย

- | | | | | |
|------|-------|-------|-------|-------|
| 1. 4 | 7. 5 | 13. 1 | 19. 4 | 25. 5 |
| 2. 1 | 8. 2 | 14. 3 | 20. 3 | 26. 3 |
| 3. 1 | 9. 5 | 15. 2 | 21. 2 | 27. 5 |
| 4. 1 | 10. 3 | 16. 4 | 22. 2 | 28. 1 |
| 5. 2 | 11. 4 | 17. 4 | 23. 5 | 29. 1 |
| 6. 4 | 12. 5 | 18. 2 | 24. 3 | 30. 4 |

แนวคิด

1. ให้ a เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า ห.ร.ม. และ ค.ร.น. ของ a และ 24 เท่ากับ 6 และ 360 ตามลำดับ แล้ว a เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 30 2. 36 3. 42 4. 90 5. 150

ตอบ 4

ห.ร.ม. และ ค.ร.น. ของจำนวนสองจำนวน จะมีสมบัติว่า ห.ร.ม. \times ค.ร.น. = ผลคูณของสองจำนวนนั้น

$$6 \times 360 = a \times 24$$

$$90 = a$$

2. กำหนดให้ $i^2 = -1$, $\left(\frac{1+i}{2} - \frac{1}{1+i}\right)^3$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-i$ 2. i 3. -8 4. $-\frac{1}{8}$ 5. 1

ตอบ 1

ข้อนี้ ทำ $\frac{1}{1+i}$ ให้มีส่วนเป็นจำนวนจริงก่อน จะง่ายกว่า เพราะส่วนจะเป็น 2 เท่ากับตัวหน้า

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+i}{2} - \frac{1}{1+i}\right)^3 &= \left(\frac{1+i}{2} - \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right)^3 \\ &= \left(\frac{1+i}{2} - \frac{1-i}{1^2-i^2}\right)^3 \\ &= \left(\frac{1+i}{2} - \frac{1-i}{2}\right)^3 \\ &= \left(\frac{1+i-(1-i)}{2}\right)^3 \\ &= \left(\frac{1+i-1+i}{2}\right)^3 = \left(\frac{2i}{2}\right)^3 = i^3 = -i \end{aligned}$$

3. $\cos^4\left(\frac{5\pi}{12}\right) - \sin^4\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 3. $-\frac{1}{2}$ 4. 0 5. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

ตอบ 1

$$\begin{aligned} \cos^4 \theta - \sin^4 \theta &= (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= (\cos 2\theta)(1) \\ &= \cos 2\theta \end{aligned}$$

แทน $\theta = \frac{5\pi}{12}$ จะได้ $\cos^4\left(\frac{5\pi}{12}\right) - \sin^4\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(2 \times \frac{5\pi}{12}\right) = \cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. ให้ P เป็นจุดบนวงรี ซึ่งมีโฟกัสอยู่ที่ $F_1(0, -2)$ และ $F_2(0, 2)$

ถ้า $PF_1 = 7$ และ $PF_2 = 3$ แล้ว สมการวงรีคือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{x^2}{21} + \frac{y^2}{25} = 1$

2. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$

3. $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$

4. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$

5. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

ตอบ 1

จากสมบัติของวงรี ผลบวกระยะจากจุดบนวงรีไปยังโฟกัสทั้งสอง = ความยาวแกนเอก = $2a$

$$\begin{aligned} PF_1 + PF_2 &= 2a \\ 7 + 3 &= 2a \\ 5 &= a \end{aligned}$$

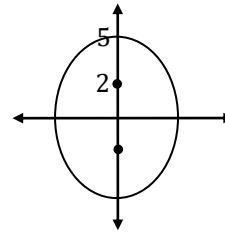
จุดโฟกัส $F_1(0, -2)$ และ $F_2(0, 2)$ เรียงตัวในแนวตั้ง \rightarrow เป็นวงรีแนวตั้ง

จุดศูนย์กลาง จะอยู่ตรงกลางระหว่างจุดโฟกัส

จะได้จุดศูนย์กลาง (h, k) คือ $(\frac{0+0}{2}, \frac{-2+2}{2}) = (0, 0)$ ซึ่งจะวาดได้ดังรูป

จะได้ระยะโฟกัส $c = 2 \rightarrow$ แทนในสูตร $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$$\begin{aligned} 2 &= \sqrt{5^2 - b^2} \\ 4 &= 25 - b^2 \\ b^2 &= 21 \end{aligned}$$



แทนในสมการวงรีแนวตั้ง $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ จะได้สมการวงรีคือ $\frac{(x-0)^2}{21} + \frac{(y-0)^2}{5^2} = 1$

$$\frac{x^2}{21} + \frac{y^2}{25} = 1$$

5. ถ้า A เป็นเมทริกซ์ 3×3 ซึ่ง $\det(2A) = 24$ แล้ว $\det(A^{-1})$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{12}$

2. $\frac{1}{3}$

3. 3

4. 6

5. 12

ตอบ 2

จาก $\det(2A) = 24$
 $2^3 \det A = 24 \rightarrow \det(kA) = k^n \det A$
 $\det A = 3$

จะได้ $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{3}$

6. ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงบวก โดยที่ $a \neq 1$ ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $\log_a b = 3$ และ $\log b + \log a = 2$ แล้ว a มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\sqrt{3}$

2. 2

3. 3

4. $\sqrt{10}$

5. 10

ตอบ 4

จาก $\log_a b = 3$

$\frac{\log b}{\log a} = 3$

$\log b = 3 \log a$

และจาก $\log b + \log a = 2$

$3 \log a + \log a = 2$

$4 \log a = 2$

$\log a = \frac{1}{2}$

$a = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$

7. ถ้าเส้นโค้งเส้นหนึ่งผ่านจุด $(8, 10)$ และมีความชันของเส้นโค้งที่จุด (x, y) โดยเป็น $\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}$ แล้ว เส้นโค้งนี้ผ่านจุดในข้อใดต่อไปนี้

1. $(0, 0)$ 2. $(0, 1)$ 3. $(0, 2)$ 4. $(0, 4)$ 5. $(0, 6)$

ตอบ 5

ความชันของเส้นโค้ง หาได้จาก $y' \rightarrow$ จะได้สรุปได้ว่า $y' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}$
อินทิเกรต จะได้ $y = \frac{\frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{4} + c$

เส้นโค้งผ่าน $(8, 10)$ แสดงว่า $x = 8, y = 10$ ต้องทำให้สมการเส้นโค้งเป็นจริง $\rightarrow 10 = \frac{8^{\frac{4}{3}}}{4} + c$
 $10 = \frac{\sqrt[3]{8^4}}{4} + c$
 $6 = c$
จะได้สมการเส้นโค้งคือ $y = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{4} + 6$

จุดที่อยู่บนเส้นโค้ง จะได้ทำให้สมการเส้นโค้งเป็นจริง \rightarrow แทน $x = 0$ จะได้ $y = \frac{0^{\frac{4}{3}}}{4} + 6 = 6$
ดังนั้น กราฟผ่านจุด $(0, 6)$

8. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{x^2+5x-14}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{1}{5}$ 2. $-\frac{1}{9}$ 3. 0 4. $\frac{1}{9}$ 5. $\frac{1}{5}$

ตอบ 2

แทน $x = 2$ จะได้ $\frac{|2-2|}{2^2+5(2)-14} = \frac{0}{0} \rightarrow$ ต้องจัดรูปให้ $x - 2$ ตัดกันก่อน

เมื่อ $x \rightarrow 2^-$ จะได้ว่า x น้อยกว่า 2 นิดๆ ซึ่งจะทำให้ $x - 2 < 0$

จากสมบัติของค่าสัมบูรณ์ จะได้ $|x - 2| = -(x - 2)$

$$|k| = \begin{cases} k & ; k \geq 0 \\ -k & ; k < 0 \end{cases}$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{x^2+5x-14} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x+7)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2^-} -\frac{1}{x+7} = -\frac{1}{2+7} = -\frac{1}{9}$

9. มีหนังสือภาษาไทยต่างกัน 2 เล่ม ภาษาอังกฤษต่างกัน 3 เล่ม และคณิตศาสตร์ต่างกัน 3 เล่ม ถ้าจะวางหนังสือเหล่านี้ซ้อนกันอยู่ในตู้เดียวกัน แล้วจำนวนวิธีที่จะจัดวางให้หนังสือวิชาเดียวกันอยู่ติดกันทั้งหมด เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 18 วิธี 2. 54 วิธี 3. 72 วิธี 4. 108 วิธี 5. 432 วิธี

ตอบ 5

จับหนังสือวิชาเดียวกัน มัดติดกันเป็นหนังสือเล่มใหม่ \rightarrow มี 3 วิชา จะมีหนังสือ 3 มัด สลับที่ได้ 3! แบบ

สลับหนังสือภายในมัด \rightarrow ไทย 2 เล่ม สลับได้ 2! แบบ

\rightarrow อังกฤษ 3 เล่ม สลับได้ 3! แบบ

\rightarrow คณิต 3 เล่ม สลับได้ 3! แบบ

คูณจำนวนแบบของทุกขั้นตอน จะได้จำนวนแบบ $= 3! 2! 3! 3! = 6 \times 2 \times 6 \times 6 = 432$ แบบ

10. จำนวนจริง 100 จำนวน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 80 ถ้าสุ่มจำนวนเหล่านี้มา 10 จำนวน พบว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 75.5 แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิตของจำนวนที่เหลือ 90 จำนวน เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. 77.75
 2. 78.5
 3. 80.5
 4. 81
 5. 81.5

ตอบ 3

$$\text{ค่าเฉลี่ยของ 100 จำนวน} = \frac{\text{ผลรวมของ 100 จำนวน}}{100} = 80$$

$$\text{จะได้ ผลรวมของ 100 จำนวน} = 8000 \quad \dots(1)$$

$$\text{ทำนองเดียวกัน ค่าเฉลี่ยของ 10 จำนวน} = \frac{\text{ผลรวมของ 10 จำนวน}}{10} = 75.5$$

$$\text{จะได้ ผลรวมของ 10 จำนวน} = 755 \quad \dots(2)$$

$$(1) - (2) \text{ จะได้ผลรวมของ 90 จำนวนที่เหลือ} = 8000 - 755 = 7245$$

$$\text{จะได้ค่าเฉลี่ยของ 90 จำนวนที่เหลือ} = \frac{\text{ผลรวมของ 90 จำนวนที่เหลือ}}{90} = \frac{7245}{90} = 80.5$$

11. ผลบวกของคำตอบทั้งหมดของสมการ $|x^2 - 72| = x$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. -1
 2. 0
 3. 8
 4. 17
 5. 19

ตอบ 4

สมการในรูป $|A| = B$ จะได้ $A = \pm B$ และเอาเฉพาะคำตอบที่ทำให้ $B \geq 0$

$$\begin{array}{l} \text{จะได้} \quad x^2 - 72 = x \quad \text{หรือ} \quad x^2 - 72 = -x \quad \text{โดยเอาเฉพาะคำตอบที่ } x \geq 0 \\ x^2 - x - 72 = 0 \quad \quad \quad x^2 + x - 72 = 0 \\ (x + 9)(x - 8) = 0 \quad \quad \quad (x + 8)(x - 9) = 0 \\ x = -9, 8 \quad \quad \quad x = -8, 9 \end{array}$$

$$\text{จะเหลือคำตอบที่ } x \geq 0 \text{ คือ } x = 8, 9 \rightarrow \text{จะได้ผลบวกคำตอบ} = 8 + 9 = 17$$

12. เศษเหลือจากการหาร $\left(\sum_{k=1}^{10} k!\right)^2$ ด้วย 5 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0
2. 1
3. 2
4. 3
5. 4

ตอบ 5

$$\left(\sum_{k=1}^{10} k!\right)^2 = (1! + 2! + 3! + \dots + 10!)^2$$

การหาเศษเหลือ สามารถกระจายลงไปในการบวก คูณ และการยกกำลังด้วยค่าคงที่ได้

$$1! = 1 \quad \text{หารด้วย 5 เหลือเศษ 1}$$

$$2! = 1 \times 2 = 2 \quad \text{หารด้วย 5 เหลือเศษ 2}$$

$$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6 \quad \text{หารด้วย 5 เหลือเศษ 1}$$

$$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24 \quad \text{หารด้วย 5 เหลือเศษ 4}$$

และสังเกตว่า ตั้งแต่ 5!, 6!, 7!, ... จะมี 5 คูณอยู่เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งเสมอ \rightarrow จะหารด้วย 5 เหลือเศษ 0

ดังนั้น ในการหา “เศษเหลือจากการหารด้วย 5” จะได้

$$\begin{aligned} (1! + 2! + 3! + \dots + 10!)^2 &= (1 + 2 + 1 + 4 + 0 + 0 + \dots + 0)^2 \\ &= (8)^2 \\ &= 64 = 4 \end{aligned}$$

13. กำหนดให้ $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก

ถ้า $x + 2$ หาร $P(x)$ เหลือเศษ 2 และสมการ $P(x) = 0$ มีคำตอบเป็นจำนวนตรรกยะอย่างน้อยหนึ่งตัว แล้ว $a + b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 11 2. 12 3. 13 4. 14 5. 15

ตอบ 1

จากทฤษฎีเศษ จะได้ว่า $x + 2$ หาร $P(x)$ เหลือเศษ $= P(-2) = 2$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad & (-2)^3 + a(-2)^2 + b(-2) + 2 = 2 \\ & -8 + 4a - 2b + 2 = 0 \\ & 4a - 8 = 2b \\ & 2a - 4 = b \quad \dots(*) \end{aligned}$$

จากทฤษฎีตัวประกอบตรรกยะ จะได้ว่า คำตอบที่เป็นตรรกยะ ต้องอยู่ในรูป $\pm \frac{\text{ตัวประกอบของพจน์ตัวเลขที่ไม่มี } x}{\text{ตัวประกอบของ สปส พจน์กำลังสูงสุด}}$
 $= \pm \frac{\text{ตัวประกอบของ } 2}{\text{ตัวประกอบของ } 1} = \pm \frac{1 \text{ หรือ } 2}{1} = 1, -1, 2, -2$

แต่ -2 เป็นคำตอบของสมการ $P(x) = 0$ ไม่ได้ (เพราะเรามี $P(-2) = 2 \neq 0$)

ดังนั้น ในสามตัวที่เหลือ $1, -1, 2$ ต้องมีอย่างน้อยหนึ่งตัวที่ทำให้สมการ $P(x) = 0$ เป็นจริง

ลองแทนแต่ละตัวจากทั้งสามตัว และแทน $b = 2a - 4$ จาก (*) เพื่อหาค่า a ในแต่ละกรณี จะได้

$P(1) = 0$	$P(-1) = 0$	$P(2) = 0$
$1 + a + b + 2 = 0$	$-1 + a - b + 2 = 0$	$8 + 4a + 2b + 2 = 0$
$a + (2a - 4) = -3$	$a - (2a - 4) = -1$	$4a + 2(2a - 4) = -10$
$3a = 1$	$-a = -5$	$8a = -2$
$a = \frac{1}{3}$	$a = 5$	$a = -\frac{1}{4}$

เนื่องจาก a ต้องเป็นจำนวนเต็มบวก จะเหลือ $a = 5$ ได้แบบเดียวเท่านั้น

แทนค่า a ใน (*) จะได้ $b = 2(5) - 4 = 6$ ซึ่งจะได้ $a + b = 5 + 6 = 11$

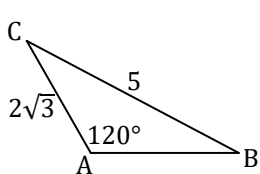
14. ในรูปสามเหลี่ยม ABC ถ้า $AC = 2\sqrt{3}$, $BC = 5$ และ $\hat{A} = 120^\circ$ แล้ว $\cos C$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{2}$ 2. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 3. $\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$ 4. $\frac{2+3\sqrt{2}}{8}$ 5. $\frac{2+4\sqrt{3}}{10}$

ตอบ 3

ข้อนี้ ถ้าใช้กฎของ cos เลขจะไม่ลงตัว (ด้าน $2\sqrt{3}$ จะทำให้สมการกำลังสองแยกตัวประกอบลำบาก)

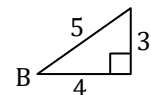
อีกวิธีคือ ใช้ กฎของ sin เพื่อหา $\sin B$ ก่อน แล้วค่อยใช้มุมของสามเหลี่ยม ข้อมไปหา $\cos C$



ใช้กฎของ sin ที่มุม A และ B จะได้

$$\begin{aligned} \frac{5}{\sin 120^\circ} &= \frac{2\sqrt{3}}{\sin B} \\ \frac{5}{\frac{\sqrt{3}}{2}} &= \frac{2\sqrt{3}}{\sin B} \\ \sin B &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

และจากด้านซุดพีทาโกรัส 3, 4, 5 จะได้ $\cos B = \frac{4}{5}$
 (A เป็นมุมบ้าน \rightarrow B ต้องเป็นมุมแหลม \rightarrow cos เป็นบวก)



จาก $A = 120^\circ$ จะเหลือ $C = 180^\circ - 120^\circ - B = 60^\circ - B$

ดังนั้น $\cos C = \cos(60^\circ - B) = \cos 60^\circ \cos B + \sin 60^\circ \sin B$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{4}{5}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{3}{5}\right) = \frac{4+3\sqrt{3}}{10}$$

15. วงกลมที่อยู่เหนือแกน X ซึ่งสัมผัสกับเส้นตรง $4y = 3x$ ที่จุด $(4, 3)$ และสัมผัสกับแกน Y มีรัศมีเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\sqrt{5}$ หน่วย 2. $\frac{5}{2}$ หน่วย 3. $\frac{13}{5}$ หน่วย 4. $\frac{8}{3}$ หน่วย 5. $2\sqrt{2}$ หน่วย

ตอบ 2

ให้วงกลมมีรัศมี r จะวาดตามทีโจทย์บอก จะได้ดังรูป

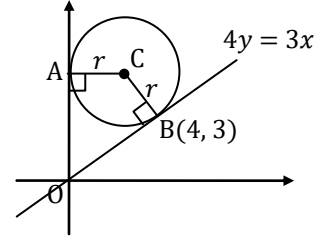
จากพิกัด $B(4, 3)$ จะได้ $OB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

ระยะจากจุดภายนอกไปสัมผัสวงกลมจะยาวเท่ากัน ดังนั้น $OA = OB = 5$

จาก $OA = 5$ และ $AC = r$ จะได้พิกัดจุดศูนย์กลางวงกลมคือ $C(r, 5)$

CB ตั้งฉากกับเส้นตรง $4y = 3x$ ดังนั้น ความชันจะคูณกันได้ -1

$$\left. \begin{array}{l} \text{ความชันจาก } C(r, 5) \text{ ไปยัง } B(4, 3) \text{ จะเท่ากับ } \frac{5-3}{r-4} = \frac{2}{r-4} \\ \text{ความชันเส้นตรง } 4y = 3x \text{ จะเท่ากับ } \frac{3}{4} \\ y = \frac{3}{4}x \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{2}{r-4} \cdot \frac{3}{4} = -1 \\ -\frac{3}{2} = r - 4 \\ \frac{5}{2} = r \end{array}$$



16. กำหนดให้ A, B และ C เป็นจุดในระบบพิกัดฉากสามมิติ และพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับ 1 ตารางหน่วย พิจารณาข้อความต่อไปนี้

- ก. $\vec{AB} \times \vec{AC}$ ตั้งฉากกับ $\vec{AB} + \vec{AC}$
 ข. $|\vec{AB} \times \vec{AC}| = 2$
 ค. $|\vec{AB}| |\vec{AC}| < 2$
 ง. $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

จำนวนข้อความที่ถูกต้องเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 (ไม่มีข้อความใดถูก) 2. 1 3. 2
 4. 3 5. 4

ตอบ 4

ก. จากสมบัติของการครอส $\vec{AB} \times \vec{AC}$ จะตั้งฉากกับระนาบที่ผ่าน \vec{AB} และ \vec{AC}

ในขณะที่ $\vec{AB} + \vec{AC}$ เป็นเวกเตอร์ที่ได้จากการต่อ \vec{AB} และ \vec{AC} จึงจะยังอยู่บนระนาบเดิมที่ผ่าน \vec{AB} และ \vec{AC}

ดังนั้น $\vec{AB} \times \vec{AC}$ จะตั้งฉากกับ $\vec{AB} + \vec{AC}$ → ก. ถูก

ข. จากสูตร พื้นที่ $\Delta = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AC}|$
 $1 = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AC}|$
 $2 = |\vec{AB} \times \vec{AC}|$ → ข. ถูก

ค. ต่อจาก ข. $2 = |\vec{AB}| |\vec{AC}| \sin \theta$ เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง \vec{AB} และ \vec{AC}

มุมใน Δ จะอยู่ระหว่าง 0 ถึง 180° ซึ่งจะทำให้ $\sin \theta < 1$

$$\begin{aligned} |\vec{AB}| |\vec{AC}| \sin \theta &< |\vec{AB}| |\vec{AC}| \\ 2 &< |\vec{AB}| |\vec{AC}| \rightarrow \text{ค. ผิด} \end{aligned}$$

ง. $\vec{AB} + \vec{BC}$ จะต่อเวกเตอร์แบบหัวต่อหาง ที่จุด B และลากจากหัวตัวตั้ง A ไปยังหางตัวบวก C ได้ \vec{AC} → ง. ถูก

17. กำหนดให้ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์มิติ 3×3 และ $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ ถ้า A เป็นเมทริกซ์มิติ 3×3

ซึ่ง $AB^t = 2I$ และ $A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ แล้ว x มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{2}$ 2. 4 3. $\frac{9}{2}$ 4. 6 5. 8

ตอบ 4

$$\begin{aligned} \text{จาก } AB^t &= 2I & \text{และจาก } A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \\ A \left(\frac{1}{2}B^t\right) &= I & \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= A^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \frac{1}{2}B^t &= A^{-1} & \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} &= A^{-1} \end{aligned}$$

โจทย์ถามค่า $x \rightarrow$ หาแค่แถว 1 หลัก 1 ก็พอ

$$\text{จะได้ } x = \frac{1}{2}((2)(-1) + (1)(5) + (3)(3)) = \frac{1}{2}(12) = 6$$

18. ผลบวกของคำตอบทั้งหมดของสมการ $4^{|3x-1|} - 2^4 = 6(2^{|3x-1|})$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{3}$ 2. $\frac{2}{3}$ 3. 1 4. $\frac{4}{3}$ 5. $\frac{5}{3}$

ตอบ 2

ให้ $|3x - 1| = k$ จะได้สมการคือ $4^k - 2^4 = 6(2^k)$

$$2^{2k} - 6(2^k) - 16 = 0$$

$$(2^k - 8)(2^k + 2) = 0$$

$$2^k = 8, -2$$

$$2^k = 2^3$$

$$k = 3$$

แทนค่า k กลับ
ไปเป็น $|3x - 1|$

$$|3x - 1| = 3$$

$$3x - 1 = 3, -3$$

$$3x = 4, -2$$

$$x = \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}$$

$$\text{จะได้ผลบวกคำตอบ} = \frac{4}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

19. เซตคำตอบของสมการ $\log(\log x) + \log(\log x^8 - 16) = 1$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $\{10, 100\sqrt{10}\}$ 2. $\{100, 10\sqrt{10}\}$ 3. $\{100, 100\sqrt{10}\}$
4. $\{100\sqrt{10}\}$ 5. $\{10\sqrt{10}\}$

ตอบ 4

$$\log(\log x) + \log(\log x^8 - 16) = 1$$

$$\log((\log x)(\log x^8 - 16)) = 1 \quad \text{เมื่อ } \log x > 0 \text{ และ } \log x^8 - 16 > 0 \quad \dots(*)$$

$$(\log x)(\log x^8 - 16) = 10^1$$

$$(\log x)(8 \log x - 16) = 10$$

$$(k)(8k - 16) = 10 \quad \text{ให้ } k = \log x$$

$$8k^2 - 16k - 10 = 0$$

$$4k^2 - 8k - 5 = 0$$

$$(2k - 5)(2k + 1) = 0$$

$$k = \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}$$

$$\log x = \frac{5}{2}, -\frac{1}{2} \quad \text{เช็คด้วยเงื่อนไขจาก (*)}$$

$$x = 10^{\frac{5}{2}} = \sqrt{10^5} = 10^2\sqrt{10} = 100\sqrt{10}$$

20. กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับเรขาคณิต ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -\frac{2}{3}$

แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{3}$ 2. $\frac{4}{9}$ 3. $\frac{2}{3}$ 4. 1 5. $\frac{4}{3}$

ตอบ 3

ให้ a_1, a_2, a_3, \dots มีอัตราส่วนร่วม = $r \rightarrow$ จากสูตรอนุกรมเรขาคณิตอนันต์ จะได้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r} = 1$
 $a_1 = 1 - r \dots (*)$

และ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = (-a_1) + a_2 + (-a_3) + a_4 + \dots \rightarrow$ มีเครื่องหมายบวกลบ สลับกับลำดับแรก
 \rightarrow เป็นลำดับเรขาคณิตที่มีอัตราส่วนร่วม = $-r$ และมีพจน์แรก = $-a_1$

จะได้ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \frac{-a_1}{1-(-r)} = -\frac{2}{3}$
 จาก (*) $\begin{cases} 3a_1 = 2(1+r) \\ 3(1-r) = 2(1+r) \\ 3-3r = 2+2r \\ 1 = 5r \\ \frac{1}{5} = r \end{cases} \rightarrow$ แทนใน (*) จะได้ $a_1 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

พิจารณานุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots$

เนื่องจาก a_1, a_2, a_3, \dots เป็นลำดับเรขาคณิตที่มีอัตราส่วนร่วม r ดังนั้น $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots = r$
 ยกกำลังสองตลอด จะได้ $\frac{a_2^2}{a_1^2} = \frac{a_3^2}{a_2^2} = \frac{a_4^2}{a_3^2} = \dots = r^2$

ดังนั้น $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มีอัตราส่วนร่วม = r^2 และมีพจน์แรก = a_1^2

ใช้สูตร จะได้ $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots = \frac{a_1^2}{1-r^2} = \frac{(\frac{4}{5})^2}{1-(\frac{1}{5})^2} = \frac{\frac{16}{25}}{\frac{24}{25}} = \frac{2}{3}$

21. กำหนดให้ $f(x) = x^3 + 2x + 3$ และ $g(x) = f^{-1}(x)$ เป็นฟังก์ชันผกผันของ $f(x)$

ค่าของ $g'(6)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{6}$ 2. $\frac{1}{5}$ 3. $\frac{1}{3}$ 4. $\frac{1}{2}$ 5. 1

ตอบ 2

จาก $f(x) = x^3 + 2x + 3$
 $x = f^{-1}(x^3 + 2x + 3)$
 $x = g(x^3 + 2x + 3)$
 $1 = g'(x^3 + 2x + 3) \cdot \frac{d}{dx}(x^3 + 2x + 3)$ \rightarrow ดิฟเฟอเรนเชียล
 $1 = g'(x^3 + 2x + 3) \cdot (3x^2 + 2) \dots (*)$

ต้องการหาค่าของ $g'(6) \rightarrow$ จะเทียบให้ $x^3 + 2x + 3 = 6$
 $x^3 + 2x - 3 = 0$

แยกตัวประกอบด้วยทฤษฎีเศษ โดยใส่แทน $x = \pm 1, \pm 3 \rightarrow x = 1$ จะได้ $1^3 + 2(1) - 3 = 0$ จริง

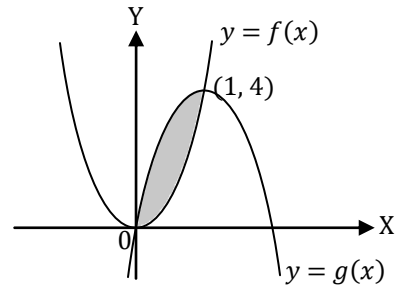
หารสังเคราะห์
$$1 \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & -3 \\ & 1 & 1 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right.$$
 จะได้ $x^3 + 2x - 3 = (x-1)(x^2 + x + 3) = 0$

แทนใน (*) $x = 1$ หรือ $x^2 + x + 3 = 0$

$1 = g'(1^3 + 2(1) + 3) \cdot (3(1^2) + 2)$
 $1 = g'(6) \cdot (5)$
 $\frac{1}{5} = g'(6)$

ไม่มีคำตอบ เพราะ $b^2 - 4ac = 1^2 - 4(1)(3) < 0$

22. กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(0, 0)$
 และ $y = g(x)$ เป็นพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(1, 4)$ ซึ่งมีกราฟดังรูป
 พื้นที่ของบริเวณที่แรเงา มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้



1. 1 ตารางหน่วย
2. $\frac{4}{3}$ ตารางหน่วย
3. $\frac{3}{2}$ ตารางหน่วย
4. $\frac{5}{3}$ ตารางหน่วย
5. 2 ตารางหน่วย

ตอบ 2

$y = f(x)$ มีจุดยอด (h, k) อยู่ที่ $(0, 0)$

เทียบกับรูปสมการ $y = a(x - h)^2 + k$ จะได้ $f(x) = a(x - 0)^2 + 0$
 $f(x) = ax^2$
 $4 = a(1^2)$ กราฟผ่าน $(1, 4)$
 $4 = a \rightarrow$ จะได้ $f(x) = 4x^2$

ทำแบบเดียวกันเพื่อหาสมการของ $g(x)$

$y = g(x)$ มีจุดยอด (h, k) อยู่ที่ $(1, 4)$ จะได้ $g(x) = a(x - 1)^2 + 4$
 $0 = a(0 - 1)^2 + 4$ กราฟผ่าน $(0, 0)$
 $-4 = a \rightarrow$ จะได้ $g(x) = -4(x - 1)^2 + 4$
 $= -4(x^2 - 2x + 1) + 4$
 $= -4x^2 + 8x$

จะได้พื้นที่ที่แรเงา $= \int_0^1 (\text{เส้นบน} - \text{เส้นล่าง}) dx$
 $= \int_0^1 (g(x) - f(x)) dx$
 $= \int_0^1 (-4x^2 + 8x - 4x^2) dx$

$= \int_0^1 (-8x^2 + 8x) dx$
 $= \left[-\frac{8}{3}x^3 + 4x^2 \right]_0^1$
 $= \left(-\frac{8}{3} + 4 \right) - (0) = \frac{4}{3}$

23. กอล์ฟโบหนึ่งมีสลาก 9 โบ ซึ่งเขียนหมายเลข 1, 2, 3, ..., 9 ถ้าสุ่มหยิบสลาก 3 โบ พร้อมกันจากกอล์ฟโบนี้ แล้วความน่าจะเป็นที่ผลคูณของหมายเลขทั้ง 3 เป็นจำนวนคู่ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{2}$
2. $\frac{2}{3}$
3. $\frac{16}{21}$
4. $\frac{33}{42}$
5. $\frac{37}{42}$

ตอบ 5

จำนวนแบบทั้งหมด : มีสลาก 9 โบ หยิบ 3 โบ จะหยิบได้ $\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$ แบบ

จำนวนแบบที่สนใจ : ผลคูณจะเป็นคู่ เมื่อมีอย่างน้อย 1 ตัวเป็นคู่ \rightarrow นับยาก

จะนับแบบตรงข้าม (คือ แบบที่เป็นคี่ทุกตัว) แล้วหักออกจากจำนวนแบบทั้งหมด แทน

มีเลขคี่ 1, 3, 5, 7, 9 ทั้งหมด 5 โบ หยิบมา 3 โบ จะหยิบได้ $\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$ แบบ

จะได้จำนวนแบบที่สนใจ = $84 - 10 = 74$ แบบ

จะได้ความน่าจะเป็น = $\frac{74}{84} = \frac{37}{42}$

24. น้ำหนักของเด็กกลุ่มหนึ่ง มีการแจกแจงปกติ ถ้าเด็กที่มีน้ำหนักน้อยกว่า 30 กิโลกรัม มีอยู่ 15.87% และเด็กที่มีน้ำหนักมากกว่า 41 กิโลกรัม มีอยู่ 11.51% แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิตของน้ำหนักของเด็กกลุ่มนี้ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ กำหนดตารางแสดงพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติดังนี้

z	0.29	0.41	1	1.2
พื้นที่	0.1141	0.1591	0.3413	0.3849

- 1. 34 กิโลกรัม
- 2. 34.5 กิโลกรัม
- 3. 35 กิโลกรัม
- 4. 35.5 กิโลกรัม
- 5. 36 กิโลกรัม

ตอบ 3

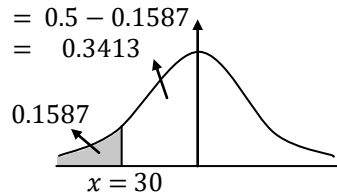
น้อยกว่า 30 กก มี 15.87% = พื้นที่ 0.1587

พื้นที่ที่ใช้เปิดตารางจะต้องวัดจากแกนกลาง → จะได้ 0.3413 ดังรูป

เปิดตารางที่พื้นที่ = 0.3413 จะได้ $z = 1$ แต่ฝั่งซ้าย z จะเป็นลบ

นั่นคือ เมื่อ $x = 30$ จะได้ $z = -1$

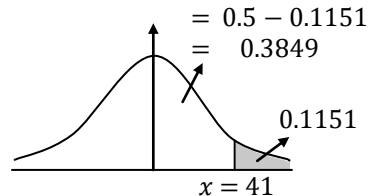
จากสูตร $z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$ จะได้ $-1 = \frac{30 - \bar{x}}{s}$
 $-s = 30 - \bar{x} \dots(1)$



มากกว่า 41 กิโลกรัม มีอยู่ 11.51% = พื้นที่ 0.1151

วัดจากแกนกลาง จะได้ 0.3849 → เปิดตารางจะได้ $z = 1.2$

จากสูตร $z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$ จะได้ $1.2 = \frac{41 - \bar{x}}{s}$
 $1.2s = 41 - \bar{x} \dots(2)$



หา \bar{x} จาก (1) และ (2) → เอาสมการ (1) $\times -1.2$ จะได้ $1.2s = -36 + 1.2\bar{x} \dots(3)$

(2) และ (3) เชื่อมกันได้ด้วย $1.2s$ จะได้ $41 - \bar{x} = -36 + 1.2\bar{x}$
 $77 = 2.2\bar{x}$
 $35 = \bar{x}$

25. ให้ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{100}$ เป็นข้อมูลชุดหนึ่ง ซึ่งมี a, m, \bar{x} เป็นฐานนิยม มัธยฐาน และค่าเฉลี่ยเลขคณิตตามลำดับ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

- ก. ถ้าเพิ่มข้อมูลอีก 1 ค่า คือ a ลงในข้อมูลชุดนี้
แล้วฐานนิยมของข้อมูลชุดใหม่ เท่ากับฐานนิยมของข้อมูลชุดเก่า
- ข. ถ้าเพิ่มข้อมูลอีก 1 ค่า คือ m ลงในข้อมูลชุดนี้
แล้วมัธยฐานของข้อมูลชุดใหม่ เท่ากับมัธยฐานของข้อมูลชุดเก่า
- ค. ถ้าเพิ่มข้อมูลอีก 1 ค่า คือ \bar{x} ลงในข้อมูลชุดนี้
แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดใหม่ เท่ากับค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดเก่า
- ง. ถ้าเพิ่มข้อมูลอีก 3 ค่า คือ a, m และ \bar{x} ลงในข้อมูลชุดนี้
แล้วพิสัยของข้อมูลชุดใหม่ เท่ากับพิสัยของข้อมูลชุดเก่า

จำนวนข้อความที่ถูกต้องเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1. 0 (ไม่มีข้อความใดถูก) 2. 1 3. 2
- 4. 3 5. 4

ตอบ 5

- ก. จากข้อมูลที่โจทย์ให้ สรุปได้ว่า ฐานนิยม มี a ค่าเดียว ดังนั้น a จะเป็นค่าข้อมูลที่ซ้ำมากที่สุด ถ้าเพิ่ม a อีกตัว จะทำให้ a ซ้ำมากขึ้น ซึ่ง a ก็จะเป็นค่าข้อมูลที่ซ้ำมากที่สุด และได้เป็นฐานนิยมเหมือนเดิม → ถูก
- ข. ในข้อมูลชุดเก่า มัธยฐานจะอยู่ที่ $\frac{N+1}{2} = \frac{100+1}{2} = 50.5 \rightarrow$ อยู่ระหว่าง a_{50} และ a_{51} ดังนั้น ถ้าเพิ่ม m เข้าไปอีกตัว มันจะไปแทรกอยู่ระหว่าง a_{50} และ a_{51} และจะกลายเป็นตัวที่มีตำแหน่งตรงกลางตัวใหม่ ทำให้มัธยฐานมีค่า m เหมือนเดิม → ถูก
- ค. สมมติให้ข้อมูลเดิมมีผลรวมข้อมูล $= k \rightarrow$ จะได้ $\bar{x} = \frac{k}{N} = \frac{k}{100}$
เมื่อเพิ่ม $\bar{x} = \frac{k}{100}$ เข้าไปอีกตัว จะทำให้มีข้อมูล 101 ตัว และมีผลรวมข้อมูลเพิ่มเป็น $k + \frac{k}{100}$
ข้อมูลใหม่จะมีค่าเฉลี่ยเลขคณิต $= \frac{k + \frac{k}{100}}{101} = \frac{100k + k}{101} = \frac{101k}{101} = \frac{101k}{100} \cdot \frac{1}{101} = \frac{k}{100} = \bar{x}$ เดิม → ถูก
- ง. เนื่องจาก a, m และ \bar{x} เป็นค่ากลางข้อมูล จึงไม่มีทางมีค่ามากกว่าค่าสูงสุด หรือน้อยกว่าค่าต่ำสุดของข้อมูล การเพิ่มค่ากลางข้อมูล จึงไม่มีผลต่อพิสัย ซึ่งคำนวณจากค่าสูงสุด - ค่าต่ำสุด → ถูก

26. ให้ x เป็นจำนวนจริงใดๆ

ค่าต่ำสุดของ $|2 - x| + |2|3 - x| + |2|5 - \sqrt{2} - x| + |2|3 + \sqrt{2} - x| + |2|5 - x| + |6 - x|$
เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1. $3 + 4\sqrt{2}$ 2. $4 + 3\sqrt{2}$ 3. $4 + 4\sqrt{2}$
- 4. $5 + 4\sqrt{2}$ 5. $5 + 5\sqrt{2}$

ตอบ 3

จากสมบัติของมัธยฐาน จะได้ $\sum |a_i - x|$ มีค่าน้อยที่สุด ถ้า x คือ มัธยฐานของข้อมูล a_i

จัดรูปโจทย์ให้อยู่ในรูป $\sum |a_i - x|$ โดยแยกก่อนที่มี 2 คูณอยู่ เป็นการบวกซ้ำของก้อนนั้น 2 ครั้ง ดังนี้

$$|2 - x| + |2|3 - x| + |2|5 - \sqrt{2} - x| + |2|3 + \sqrt{2} - x| + |2|5 - x| + |6 - x|$$

$$= |2 - x| + |3 - x| + |3 - x| + |5 - \sqrt{2} - x| + |5 - \sqrt{2} - x| + |3 + \sqrt{2} - x| + |3 + \sqrt{2} - x| + |5 - x| + |5 - x| + |6 - x|$$

→ มีค่าน้อยที่สุด ถ้า x คือมัธยฐานของข้อมูล $2, 3, 3, 5 - \sqrt{2}, 5 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}, 5, 5, 6$

หามัธยฐาน ต้องเรียงข้อมูลจากน้อยไปมาก แล้วตอบตัวตรงกลาง

เนื่องจาก $5 - \sqrt{2} \approx 5 - 1.4 = 3.6$ และ $3 + \sqrt{2} \approx 3 + 1.4 = 4.4$ ดังนั้น ข้อมูลนี้เรียงจากน้อยไปมากแล้ว มีข้อมูล 10 จำนวน → มัธยฐาน จะอยู่ตัวที่ $\frac{N+1}{2} = \frac{10+1}{2} = 5.5$ → ระหว่างตัวที่ 5 กับตัวที่ 6

นั่นคือ ระหว่าง $5 - \sqrt{2}$ กับ $3 + \sqrt{2}$ → จะได้ มัธยฐาน $= \frac{5 - \sqrt{2} + 3 + \sqrt{2}}{2} = 4$

$$\text{แทน } x = 4 \text{ ได้ค่าต่ำสุด} = |2 - 4| + 2|3 - 4| + 2|5 - \sqrt{2} - 4| + 2|3 + \sqrt{2} - 4| + 2|5 - 4| + |6 - 4|$$

$$= 2 + 2 + 2|1 - \sqrt{2}| + 2|\sqrt{2} - 1| + 2 + 2$$

$1 < \sqrt{2}$ ดังนั้น $1 - \sqrt{2}$ จะเป็นลบ ในขณะที่ $\sqrt{2} - 1$ จะเป็นบวก

$$\text{จากสมบัติค่าสัมบูรณ์ } |k| = \begin{cases} k & , k \geq 0 \\ -k & , k < 0 \end{cases} \text{ จะได้ } |1 - \sqrt{2}| = -(1 - \sqrt{2})$$

$$\text{และ } |\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$$

$$= 2 + 2 + 2(-(5 - \sqrt{2} - 4)) + 2(3 + \sqrt{2} - 4) + 2 + 2$$

$$= 2 + 2 + -2 + 2\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2} + 2 + 2$$

$$= 4 + 4\sqrt{2}$$

27. กำหนดให้ $i^2 = -1$ และ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ถ้า $S = \{(a, b, c) \mid i^a + i^b + i^c = 1 \text{ และ } a, b, c \in A\}$ แล้ว S มีจำนวนสมาชิกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 3 2. 4 3. 5 4. 7 5. 9

ตอบ 5

คือ ให้หาจำนวนแบบ $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4\}$ ที่ทำให้ $i^a + i^b + i^c = 1$

เนื่องจาก $i^1 = i$ ดังนั้น $i^a, i^b, i^c \in \{i, -1, -i, 1\}$
 $i^2 = -1$ จะเห็นว่ามีแค่ 2 กลุ่มที่บวกกันได้ 1 คือ $\{i, -i, 1\}$ กับ $\{-1, 1, 1\}$
 $i^3 = -i$
 $i^4 = 1$ ถัดไป จะหาจำนวนแบบการเรียงลำดับของแต่ละกลุ่ม $\frac{?}{a} \frac{?}{b} \frac{?}{c}$
 เพื่อกำหนดว่าตัวไหนเป็น a ตัวไหนเป็น b และตัวไหนเป็น c

กรณี $\{i, -i, 1\}$: เรียงลำดับได้ $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ แบบ

กรณี $\{-1, 1, 1\}$: ใช้สูตรการเรียงลำดับของซ้ำ จะได้ $\frac{3!}{2!} = 3$ แบบ

รวมทั้งสองกรณี จะได้ $6 + 3 = 9$ แบบ

28. ถ้า $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับของจำนวนจริงบวก ซึ่ง $a_1 = 2$ และ $\log_{\frac{1}{3}} a_1, \log_{\frac{1}{3}} a_2, \dots, \log_{\frac{1}{3}} a_n, \dots$

เป็นลำดับเลขคณิต ซึ่งมีผลต่างร่วมเท่ากับ $\frac{1}{2}$ แล้ว $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $3 + \sqrt{3}$ 2. $3 + 2\sqrt{3}$ 3. $3 + 3\sqrt{3}$
 4. 9 5. $6\sqrt{3}$

ตอบ 1

แทน $a_1 = 2$ จะได้พจน์แรกคือ $\log_{\frac{1}{3}} 2$

จากสูตรพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต ลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกคือ $\log_{\frac{1}{3}} 2$ และมีผลต่างร่วม $\frac{1}{2}$ จะมีสูตรพจน์ทั่วไป

คือ $\log_{\frac{1}{3}} 2 + (n - 1)\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \log_{\frac{1}{3}} a_n &= \log_{\frac{1}{3}} 2 + (n-1) \left(\frac{1}{2}\right) \\ a_n &= \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 2 + (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)} \\ a_n &= \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)(n-1)} \\ a_n &= 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

จะเห็นว่าสูตรของ a_n ตรงกับสูตรพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต $a_n = a_1 r^{n-1}$

ดังนั้น a_n เป็นลำดับเรขาคณิต ที่มี $a_1 = 2$ และมี $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned} \text{ใช้สูตรอนุกรมเรขาคณิตอนันต์ จะได้ } \sum_{i=1}^{\infty} a_i &= \frac{a_1}{1-r} = \frac{2}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} \\ &= \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2} = 3 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

29. ถ้า $z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right)$ และ $z_2 = 3 \left(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right)$ แล้ว $|z_1 - z_2|$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\sqrt{5}$ 2. $\sqrt{6}$ 3. 3 4. $2\sqrt{3}$ 5. $3\sqrt{2}$

ตอบ 1

เปลี่ยนเป็นรูปเชิงขั้ว จะได้ $z_1 = \sqrt{2} \angle \frac{\pi}{8}$ และ $z_2 = 3 \angle \frac{3\pi}{8}$

$$\begin{aligned} \text{จากสูตร } |z_1 - z_2|^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\text{Re}(z_1 \bar{z}_2) \\ &= \sqrt{2}^2 + 3^2 - 2\text{Re}\left(\sqrt{2} \angle \frac{\pi}{8} \cdot \overline{3 \angle \frac{3\pi}{8}}\right) \\ &= 11 - 2\text{Re}\left(\sqrt{2} \angle \frac{\pi}{8} \cdot \left(3 \angle -\frac{3\pi}{8}\right)\right) \quad \begin{matrix} \curvearrowright r \angle \theta = r \angle -\theta \\ \curvearrowright (r_1 \angle \theta_1) \cdot (r_2 \angle \theta_2) \\ \quad = r_1 r_2 \angle (\theta_1 + \theta_2) \end{matrix} \\ &= 11 - 2\text{Re}\left(3\sqrt{2} \angle \left(\frac{\pi}{8} - \frac{3\pi}{8}\right)\right) \\ &= 11 - 2\text{Re}\left(3\sqrt{2} \angle -\frac{\pi}{4}\right) \quad \begin{matrix} \curvearrowright r \angle \theta = r \cos \theta + ri \sin \theta \\ \text{Re}(r \angle \theta) = r \cos \theta \end{matrix} \\ &= 11 - 2\left(3\sqrt{2} \cos -\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 11 - 2\left(3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= 11 - 6 = 5 \\ |z_1 - z_2| &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

30. กำหนดให้ $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ถ้าสุ่มหยิบสมาชิก 4 ตัวพร้อมกันจาก S เพื่อนำมาสร้างเมทริกซ์มิติ 2×2 แล้วความน่าจะเป็นที่เมทริกซ์นั้นเป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐานเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{2}{3}$ 2. $\frac{11}{15}$ 3. $\frac{4}{5}$ 4. $\frac{13}{15}$ 5. $\frac{14}{15}$

ตอบ 4

คำว่า "หยิบ 4 ตัวพร้อมกัน" จะช่วยให้เดาใจคนออกข้อสอบได้เป็นนัยๆ ว่า 4 ตัวนั้นจะเป็น 4 ตัวที่แตกต่างกัน

เมทริกซ์ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ จะเป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน เมื่อ $ad - cb \neq 0$

จำนวนแบบทั้งหมด : S มี 5 ตัว \rightarrow เลือกตัวเลขให้ a ได้ 5 แบบ

$\rightarrow b$ ต้องไม่ซ้ำกับ a จะเหลือ 4 แบบ

$\rightarrow c$ จะเหลือ 3 แบบ และ d จะเหลือ 2 แบบ

จะได้จำนวนแบบทั้งหมด $= 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ แบบ

จำนวนแบบที่ต้องการ : จะใช้วิธีนับแบบตรงข้าม ที่ $ad - bc = 0$ แทน แล้วค่อยหักออกจากจำนวนแบบทั้งหมด

$$ad = bc$$

จะมี 2 ประเภท คือ (ก) $(-2)(-1) = (2)(1)$ กับ (ข) $(-2)(1) = (2)(-1)$

→ เลือกว่าจะเป็นประเภท (ก) หรือ (ข) จะเลือกได้ 2 แบบ

→ ในแต่ละประเภท จะมีตัวเลข 4 ตัว เลือก 1 ตัวให้ a ได้ 4 แบบ

d จะเลือกไม่ได้ ต้องเป็นตัวเลขที่คุณอยู่กับ a

(เช่นในประเภท (ก) ถ้า a เป็น 2 จะบังคับให้ d ต้องเป็น 1)

→ เหลือตัวเลข 2 ตัว เลือก 1 ตัวให้ b ได้ 2 แบบ

c จะเลือกไม่ได้ ต้องเป็นตัวเลขตัวสุดท้ายที่เหลือ

จะได้จำนวนแบบตรงข้าม $= 2 \times 4 \times 2 = 16$ แบบ

คิดเป็นแบบที่ต้องการ $= 120 - 16 = 104$ แบบ

$$\text{จะได้ความน่าจะเป็น} = \frac{104}{120} = \frac{13}{15}$$

เครดิต

ขอบคุณ ข้อสอบ และเฉลยละเอียด จาก อ.ปิง GTRmath

ขอบคุณ คุณ Chonlakorn Chiewpanich

และ คุณ บุญช่วย ฤทธิเทพ

และ คุณ คณิต มงคลพิทักษ์สุข (นาย) ผู้เขียน Math E-book

และ คุณ Kieo Dome ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเอกสาร